数値処理・計算物理学

数の話と誤差の話

本日の構成

（１）数の話

- 10進数と2進数
- 実数型の有効数字

（２）誤差の話

- 計算誤差とは？
- 誤差の入り方

（３）課題

話を簡単にする為に、10進法の世界で話を進めます。
大体の話は、10→2の読み替えをするだけでそのまま2進法に通用するはず。

数の話（１）

Ｚ＆Ｒ

とりあえずＣ言語に話をしぼる。

授業で出てきた数・・・整数(int他)と実数(double他)

普通の数学においては、整数は実数の一部：

$$Z \subset R$$

計算機の中では、整数**型**と実数**型**は全く別の存在

$$Z\,?\,R$$

どういうことか？

→整数型と実数型では、数を表現するルールが違う。

数の話（２）

整数型と実数型ってどう違う？

計算機では、ほぼあらゆる情報を2進法で表す
・・・が、とりあえず10進法で話を進める。

例：光速 c をどう書き表すか？

$$c[\mathrm{m/s}] = 299792458$$

1) 値そのままのべた書き表現

$$= 2.998 \times 10^8$$

2) 有効数字×桁数　という表現

1)の特徴

- 数値全体が正確
- “漏れ”がない
- <u>数値が大きくなると桁数が増えてしんどい</u>

2)の特徴

- 大きな数を表わしやすい
- “漏れ”がある
- <u>有効数字外は不正確</u>

整数型と実数型の違いは、上記の1)と2)の違いに相当する

※ c が整数になるのは、”1秒”がそうなるように定義されているから

数の話（３）

整数型と実数型、その実際（範囲篇）

数字(0〜9)を5個使って、1)と2)の方法で数を表してみる。

1)　単純に数字を5つ並べる。

$$00000 \leq X \leq \underline{99999}$$

だいたい10^5くらい

2)　有効数字を3ケタ、桁数の指数を2ケタとする。

$$\begin{aligned} X &= B \times 10^E \\ 0.00 &\leq B \leq 9.99 \\ 00 &\leq E \leq 99 \\ \longrightarrow 0.00 \times 10^{00} &\leq X \leq \underline{9.99 \times 10^{99}} \end{aligned}$$

ほぼ10^{100}

使う数字の数は同じだが、
表せる数の範囲では、2)が圧勝。

→じゃあ1)のメリットって何？

数の話（４）

整数型と実数型、その実際（精度篇）

1)の方法のメリットは精度にある。

1)では5ケタ分すべての数字が有効数字になるが、
2)での有効数字はわずか3ケタ。

更なるメリット：

1)では、
加減乗（制限付きで除）を繰り返しても誤差が生じない

整数は加減乗に関して閉じているので、これらの計算を繰り返した結果も整数。
（除算でも、結果の小数部を切り捨てることにすればゼロを除いて閉じている。）

→結果が5ケタ(0-99999)に納まるならば、それは絶対に正確な値。

2)ではこうはいかない。
指数部が大きく違う数同士を足し引きしたりすると
簡単に誤差が出る。

・・・・・・・ということで計算誤差の話にうつります。

誤差の話（１）

ペンと現実とビット

細かい誤差の話からは少し離れます。

結局計算物理・・・
というかコンピュータを使った物理というのは何をしているのか？

物理世界の現象

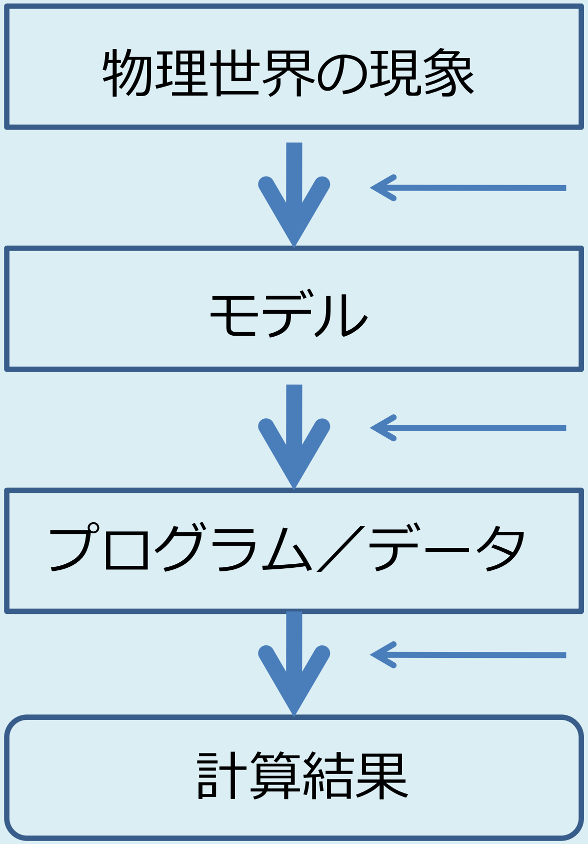
モデル

プログラム／データ

計算結果

誤差の話（２）

誤差の分類



モデル誤差

現象を理論モデルに落とす時の誤差

近似誤差

理論モデルを計算可能な形にする時の誤差

<u>計算誤差</u>

実際の計算過程で生じる誤差

今日は計算誤差についての話。

誤差の話（３）

計算誤差の話

実数型の計算で生じる誤差に絞って話す。

実数型の構造(2進法バージョン)：

$$X = B \times 2^{E}$$

底も２

B, E：（2進数で表した）有効数字と桁数

有効数字

float型: 2進23ケタ、10進7ケタ

double型: 2進52ケタ、10進15ケタ

実数型の構造による誤差：

- 丸め誤差
- 桁落ち
- 情報落ち

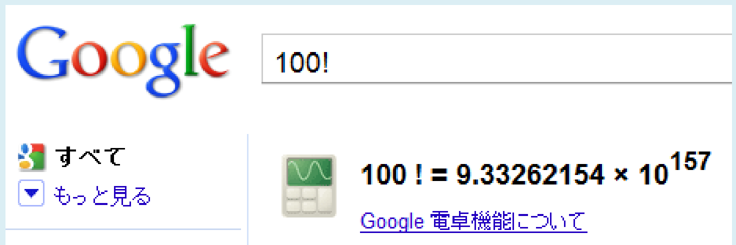
誤差の話（4）

有効数字がらみの誤差２つ

丸め誤差

•有効数字 B の桁数より桁が多い数字を扱う
→B の桁数まで有効数字が減る

例（手抜き）



ちなみに正確な値→ 100! = 93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000

桁落ち

•上から何桁かが全く等しい数字の差を求める
→等しい桁数分有効数字が失われる

例（すごく手抜き）

有効数字わずか1ケタ

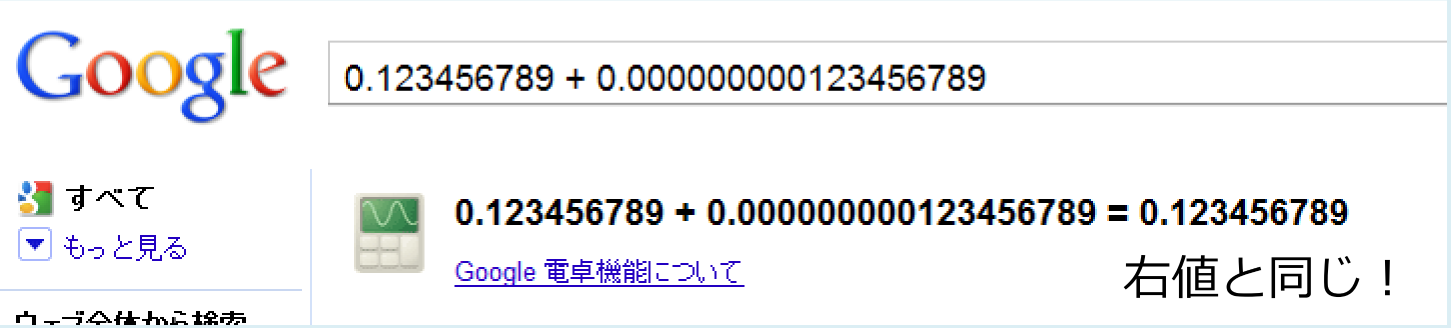
誤差の話（５）

指数がらみの誤差

情報落ち

- 指数部が著しく異なる数を加減算
→実際より変化が小さくなる
（最悪の場合は加減算の前後で変化なし）

例（また手抜き）



右値と同じ！

誤差の話（６）

「有限」であることによる誤差

打ち切り誤差

無限（あるいは有限だけどたくさん）に続く手続きを
途中で打ち切るときに出る誤差。

・・・計算誤差というよりは近似誤差などに近い。

例：円周率を求める時の誤差。

・・・Googleを使う例が思いつかなかった

きょうの課題・微分

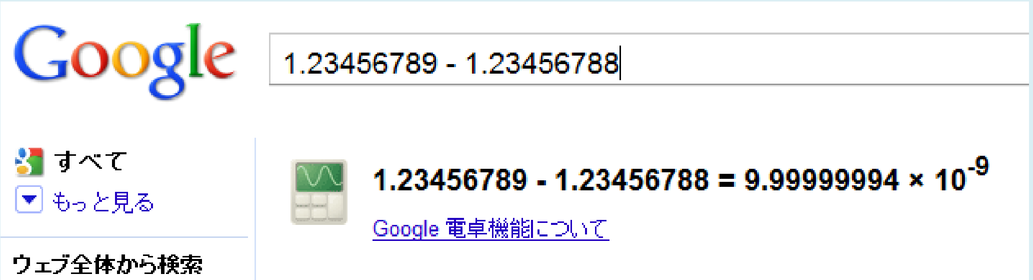
$$f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$$

この関数の導関数を区間$[0,4]$で求める。

手計算による導関数との差を求め、その振る舞いを考察する。
誤差はどのくらいか、その誤差の原因は何か。

おまけページ

コンピュータの中身が2進数である、ということが
ちょっとだけ匂うような例。



10進数では正確な答えは 10^{-8}.
long doubleで計算しても10^{-8}(がんばって筆算して確認).

桁落ちと丸め誤差が絡み合ってこんなんなってるらしい。