# $n$+$^{12}$C→ $(n+p)$+$^{11}$B 準弾性散乱の運動学(III)

Y. Satou, Y. Makimura

September 14, 2024

**Abstract**

$\theta_n = 0^\circ$ での $n$+$^{12}$C→ $(n+p)$+$^{11}$B 準弾性散乱の運動学を相対論の枠組みの中で考察した。フェルミ運動量は、終状態の陽子と $^{11}$B の相対運動量とした。

## 1　はじめに

前回と前々回の $n$+$^{12}$C→ $(n+p)$+$^{11}$B 反応の運動学の考察 [2, 3] では、非相対論を用い、それぞれ、陽子、または $^{11}$B のフェルミ運動が分解反応後に保持されるとした。これらの考察では、フェルミ運動量は $^{12}$C 内の陽子と仮想 $^{11}$B の間の運動量として想定された。

ここでは、反応の $Q$ 値という考え方を廃し、相対論で考察を進める。その為に、フェルミ運動量 (の定義) を終状態の陽子と $^{11}$B の間の相対運動量（観測可能量）に改めた。

## 2　出射陽子と $^{11}$B が相対運動エネルギーを持たない場合

終状態の陽子と $^{11}$B は一つの塊（粒子）として取り扱い、その質量は $M_0$、エネルギー・運動量（四元ベクトル）は $(E_0', P_0')$ である。ビーム中性子のそれは $(E_n, p_n)$、標的炭素は $(M, 0)$ である。中性子の質量は $m_n$ とする。出射後の中性子の進行方向はビーム中性子と同じとし、四元ベクトルは $(E_n', p_n')$ で表す。

Mandelstam の $s$ 変数 [1] は次の通り。

$$s = (E_n + M)^2 - p_n^2 = m_n^2 + 2E_nM + M^2. \tag{1}$$

重心系に移るローレンツ変換の $\beta$, $\gamma$ は次の通り。

$$\beta = \frac{p_n}{E_n + M}, \tag{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_n + M}{\sqrt{s}}. \tag{3}$$

重心系での中性子と標的の四元ベクトルを、それぞれ $(E_n^c, p^c)$、$(E^c, -p^c)$ とすると、これらは実験室系での対応量と次の様に対応付けられる。

$$\begin{pmatrix} E_n^c \\ p^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ p_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} E^c \\ -p^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

重心系での反応後の中性子と、陽子と $^{11}\mathrm{B}$ の二体系（この節では質量 $M_0$ の一体系として取り扱う）の四元ベクトルをそれぞれ、$(E_n'^c, p'^c)$、$(E'^c, -p'^c)$ とする。ここで、次の緒関係が成り立つ [1]。

$$\begin{aligned}
\sqrt{s} &= E_n^c + E^c = E_n'^c + E'^c, & (6)\\
E_n'^c &= \sqrt{m_n^2 + (p'^c)^2}, & (7)\\
E'^c &= \sqrt{M_0^2 + (p'^c)^2}. & (8)
\end{aligned}$$

式 (7) と式 (8) から次を得る。

$$(E_n'^c)^2 - (E'^c)^2 = m_n^2 - M_0^2. \tag{9}$$

これと式 (6) は次の関係を示唆する。

$$\begin{aligned}
E_n'^c - E'^c &= \frac{1}{\sqrt{s}}(m_n^2 - M_0^2), & (10)\\
E_n'^c + E'^c &= \sqrt{s}. & (11)
\end{aligned}$$

これを解いて、重心系での各粒子の散乱後の全エネルギーを得る。

$$\begin{aligned}
E_n'^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(m_n^2 - M_0^2 + s), & (12)\\
E'^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(-m_n^2 + M_0^2 + s). & (13)
\end{aligned}$$

また、$p'^c = \sqrt{(E_n'^c)^2 - m_n^2}$ である。

実験室系での四元運動量はローレンツ変換により次で求まる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_n' \\ p_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n'^c \\ p'^c \end{pmatrix}, & (14)\\
\begin{pmatrix} E_0' \\ P_0' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'^c \\ -p'^c \end{pmatrix}. & (15)
\end{aligned}$$

# 3　出射陽子と $^{11}\mathrm{B}$ が相対運動エネルギーを持つ場合

出射する陽子と $^{11}\mathrm{B}$ の二体系の静止系において、陽子と $^{11}\mathrm{B}$ はフェルミ運動量 (相対運動量) $\sigma$ を持つとする。それぞれの四元ベクトルを $(E_1'', \boldsymbol{P}_1'')$、$(E_2'', \boldsymbol{P}_2'')$ とする。陽子の質量を $m_p$、$^{11}\mathrm{B}$ の質量を $M(^{11}\mathrm{B})$ とすると各成分は次で表される。

$$\begin{aligned}
E_1'' &= \sqrt{m_p^2 + \sigma^2}, & (16)\\
P_{1z}'' &= -\sigma\cos\theta, & (17)\\
P_{1x}'' &= -\sigma\sin\theta, & (18)\\
E_2'' &= \sqrt{M(^{11}\mathrm{B})^2 + \sigma^2}, & (19)\\
P_{2z}'' &= \sigma\cos\theta, & (20)\\
P_{2x}'' &= \sigma\sin\theta. & (21)
\end{aligned}$$

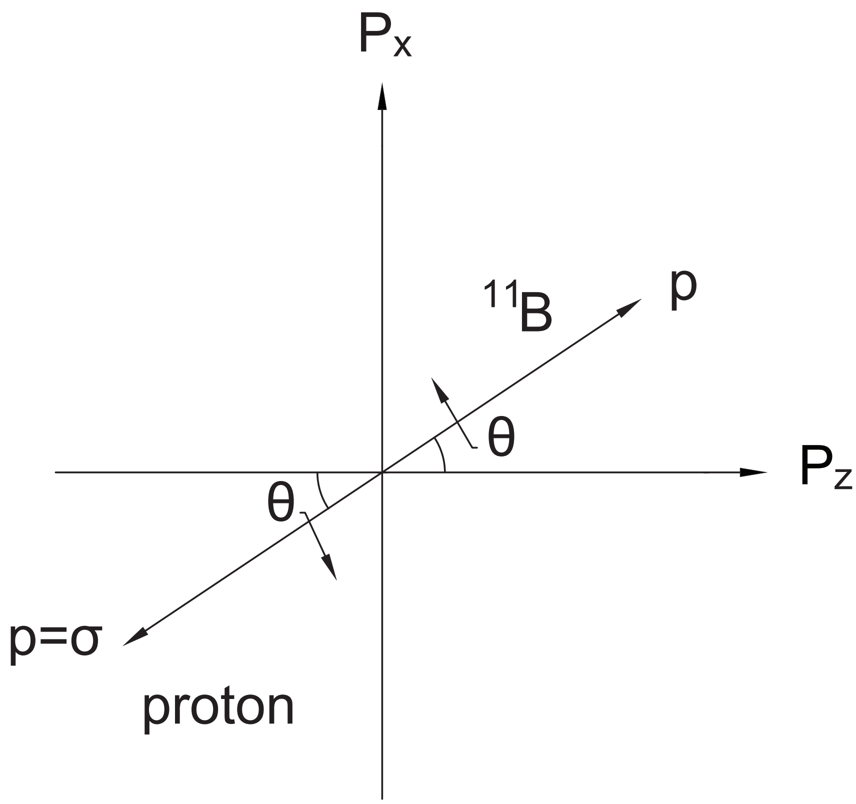


Figure 1: $\theta_n = 0^\circ$ での $n+^{12}\mathrm{C} \to (n+p)+^{11}\mathrm{B}$ 分解反応後の、陽子と $^{11}\mathrm{B}$ 核の重心系での相対運動量ベクトルのダイアグラム。$\theta$ と相対運動量 $p$ (=$\sigma$: フェルミ運動量) が独立変数に取られる。

ここで、$\theta$ は相対運動量のビーム方向からの回転角度である。フェルミ運動のダイアグラムを図 1 に示す。$\theta = 0^\circ$ で陽子のベクトルはビームと逆向き（$z$ 軸の負方向）とした（$^{11}\mathrm{B}$ のベクトルはビーム方向 ($z$ 軸の正方向) を向く）。$\theta$ の正の値は反時計回りを表す。

終状態二体系を一体として扱う際の質量は、フェルミ運動の効果も含み、$M_0$ で与えられるとする。

$$M_0 = E_1'' + E_2''. \tag{22}$$

実験室系から、陽子と $^{11}\mathrm{B}$ の二体系の静止系に移るローレンツ変換のパラメータを $\beta_1 = P_0'/E_0'$、$\gamma_1 = E_0'/M_0$ とする。実験室系での陽子と $^{11}\mathrm{B}$ の四元ベクトルを $(E_1', \boldsymbol{P}_1')$、$(E_2', \boldsymbol{P}_2')$ とする。これらは次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ P_{1z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1'' \\ P_{1z}'' \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$P_{1x}' = P_{1x}'', \tag{24}$$

[1]出射中性子が別の粒子の場合は、式 (7) において $m_n$ を一般の $m$ に置き換えれば、それ以下の式はそのまま使用できる

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E'_2 \\ P'_{2z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E''_2 \\ P''_{2z} \end{pmatrix}, && (25) \\
P'_{2x} &= P''_{2x}. && (26)
\end{aligned}
$$

次の関係が成り立つのは自明である。

$$
\begin{aligned}
E'_1 + E'_2 &= E'_0, && (27) \\
P'_{1z} + P'_{2z} &= P'_0, && (28) \\
P'_{1x} + P'_{2x} &= 0. && (29)
\end{aligned}
$$

フェルミ運動量 ($p = \sigma$) を変化させた時の反応後の中性子、$^{11}$B、及び陽子の運動量と運動エネルギーの変化を図 2 に示す。$\theta = 0^\circ$ についての計算結果で、運動量は絶対値が示されている。入射中性子のエネルギーは $T_n = 200$ MeV ($p_n = 644.84585$ MeV/c：相対論で計算) とした。結果は、非相対論で計算した際の、陽子がフェルミ運動量を保持するとした場合の結果 [2] に類似する。

図 3 に、フェルミ運動量を変化させた際の次の諸量の振る舞いを示す: （左パネル）終状態の陽子と $^{11}$B の二体系を一体系として扱った際の質量の増加（$M_0 - m_p - M(^{11}\mathrm{B})$)、（中央パネル）同二体系の一体系としての運動エネルギー（$E'_0 - M_0$)、（右パネル）同二体系の一体系としての運動量（$P'_0$)。

図 4 に、終状態の陽子 –$^{11}$B 二体系のフェルミ運動量が $\sigma = 90$ MeV/c (=$p$)、方位が $\theta = [0^\circ, 360^\circ]$ の場合の、分解過程後の陽子と $^{11}$B の運動量の軌跡 (trajectory) を示す。陽子の軌跡は中性子ビームの方向に偏心していることが分かる。非相対論で計算した際の、陽子がフェルミ運動量を保持するとした場合の結果 [2] を点線で示す。今回の相対論の結果は、この非相対論の結果に類似する。

報告 [3] に示した、非相対論を用いた場合の運動学変数の範囲の図に今回の相対論の結果を重ね描きした。中性子、陽子、$^{11}$B の結果を、それぞれ図 5、図 6、及び図 7 に示す。

# References


[1] C.J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, North-Holland (1975).

[2] Kinematics of the n+12C → (n+p)+11B quasi-free elastic scattering (I) (Y.Satou, Y.Makimura).

[3] Kinematics of the n+12C → (n+p)+11B quasi-free elastic scattering (II) (Y.Satou, Y.Makimura).

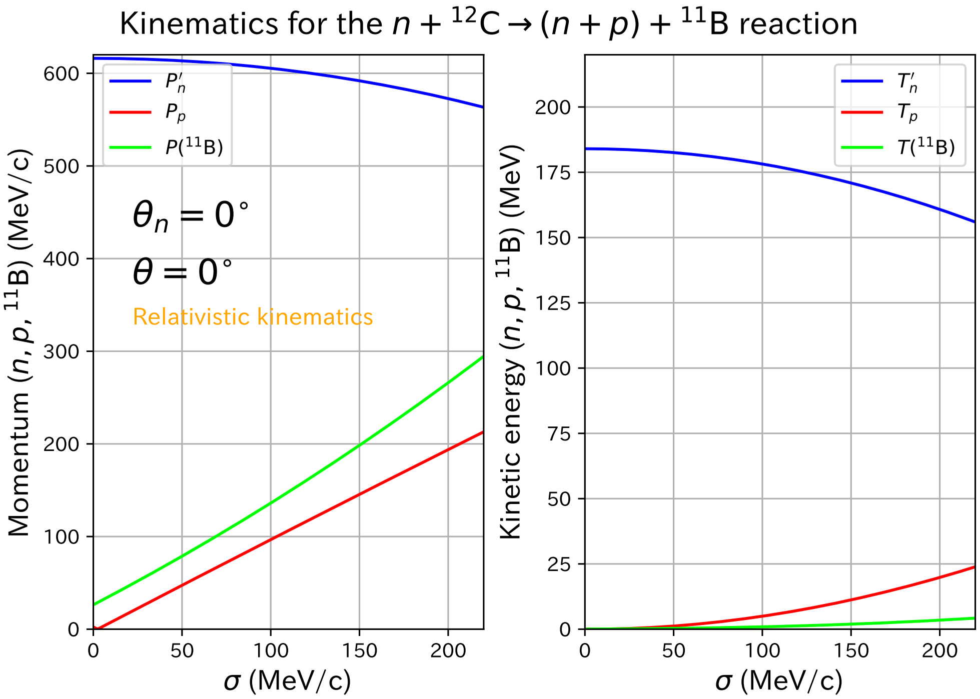


Figure 2: $T_n = 200$ MeV での $n$+${}^{12}$C $\to$ $(n+p)$+${}^{11}$B 反応の運動学。フェルミ運動量 $\sigma$ を変化させた際の各粒子の運動量の絶対値（左パネル）と運動エネルギー（右パネル）の変化を示す。中性子は偏向せず直進するとした。終状態二体系のフェルミ運動量ベクトルの方向（図 1）は $\theta = 0^\circ$ とした。

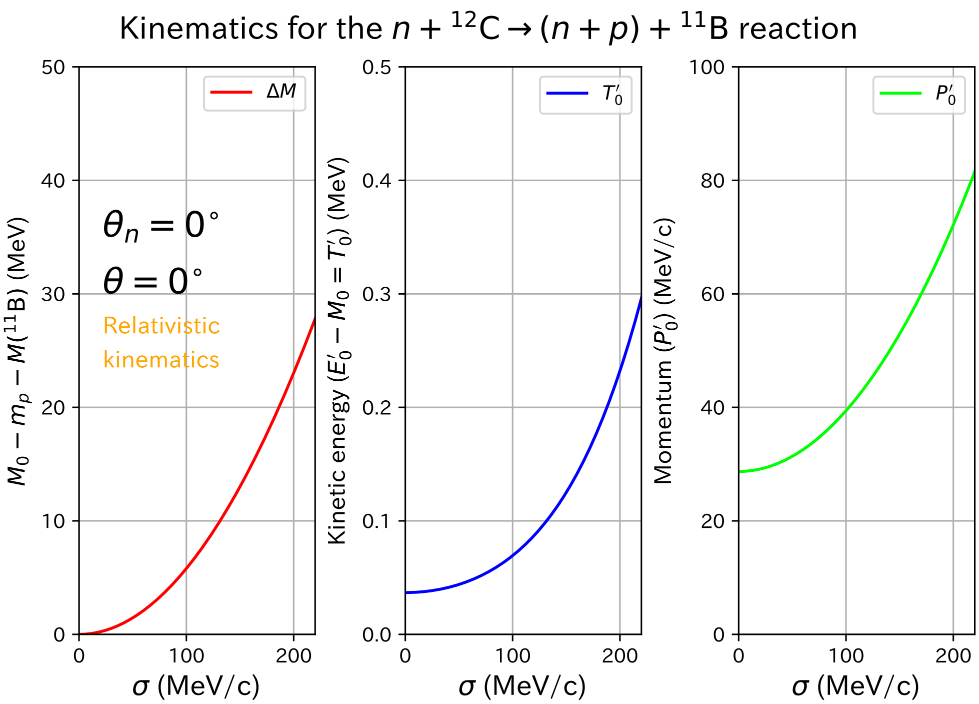


Figure 3: $T_n = 200$ MeV での $n$+${}^{12}$C $\to$ $(n+p)$+${}^{11}$B 反応の運動学（続き）。フェルミ運動量 $\sigma$ を変化させた際の終状態二体系の質量増分（$M_0 - m_p - M({}^{11}\mathrm{B})$、左パネル）、同二体系の運動エネルギー（$E'_0 - M_0$、中央パネル）、同二体系の運動量（$P'_0$、右パネル）。

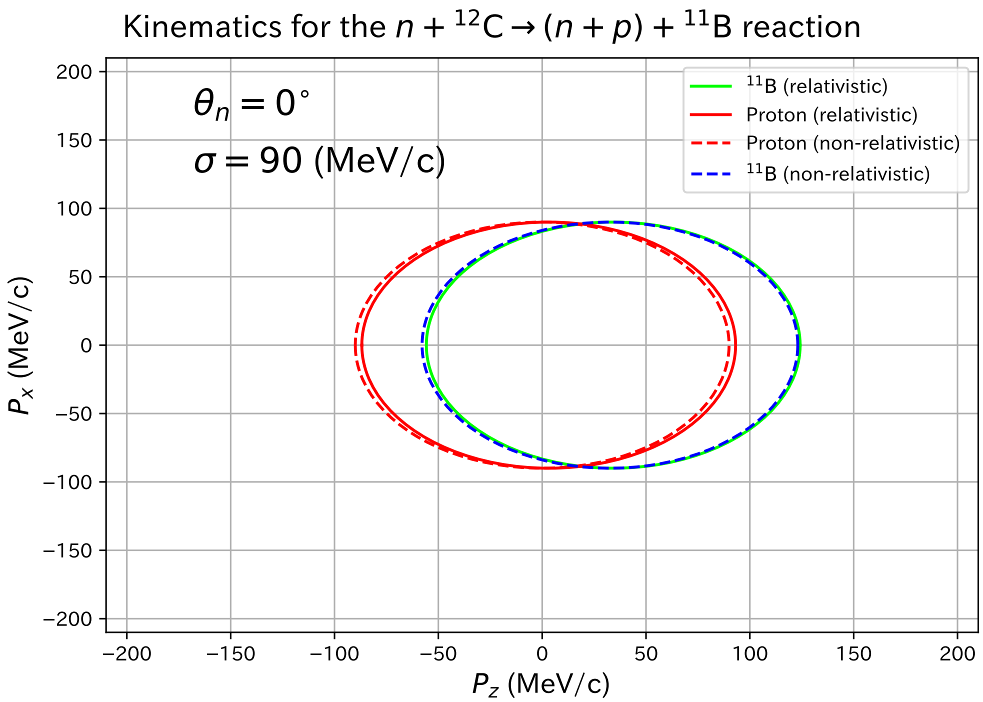


Figure 4: フェルミ運動量が $\sigma = 90$ MeV/c $(=p)$、方位が $\theta = [0^\circ, 360^\circ]$ の場合の、分解過程後の陽子と ${}^{11}$B の運動量の軌跡（実線）。破線は非相対論（で陽子のフェルミ運動が保持されるとした場合 [2]）の結果。

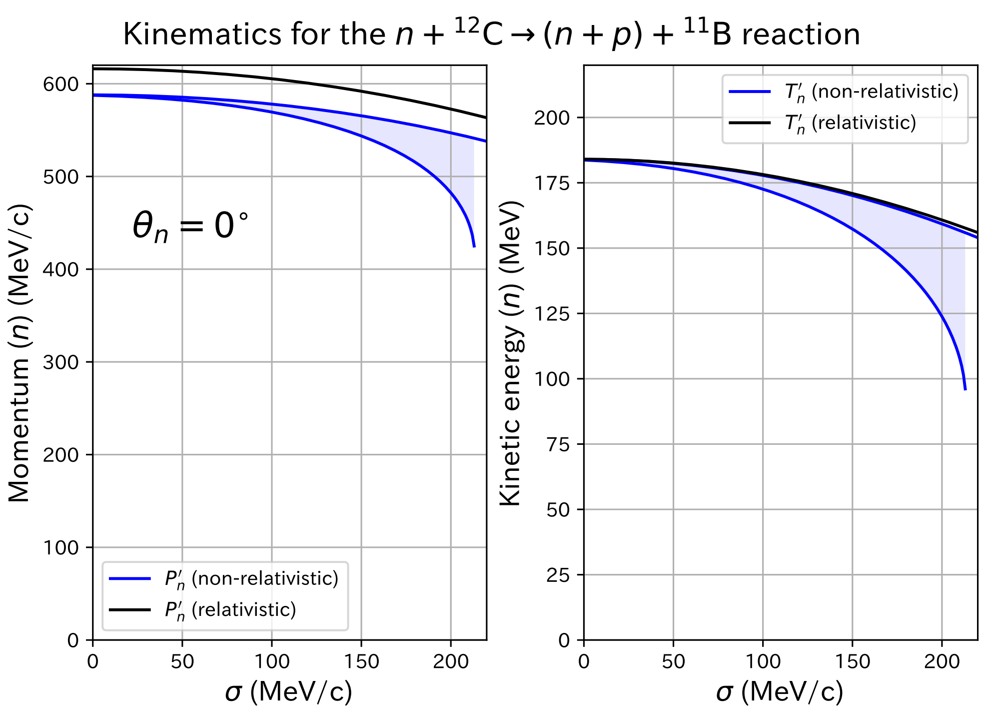


Figure 5: $\theta_n = 0^\circ$ での $n$+${}^{12}$C$\rightarrow$ $(n+p)$+${}^{11}$B 準弾性散乱 (@$T_n = 200$ MeV) における、出射中性子の運動量とエネルギーのフェルミ運動量 $\sigma$ 依存性。青線とその領域は非相対論の結果 [2, 3]、黒線は相対論の結果。

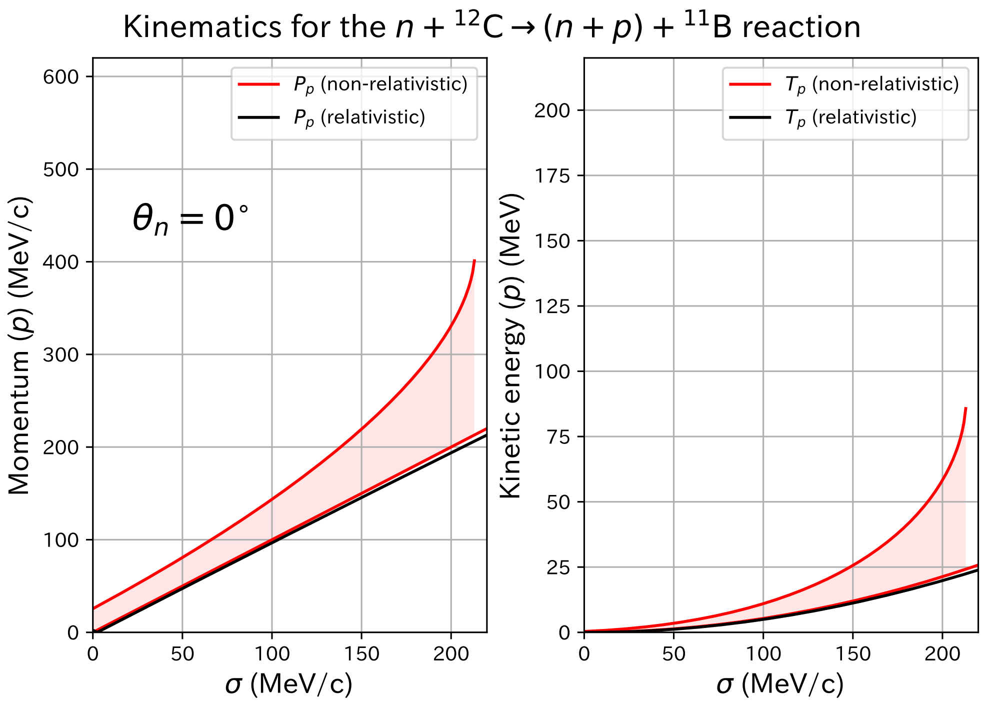


Figure 6: $\theta_n = 0^\circ$ での $n$+$^{12}$C→ $(n+p)$+$^{11}$B 準弾性散乱 (@$T_n = 200$ MeV) における、陽子の運動量の絶対値とエネルギーのフェルミ運動量 $\sigma$ 依存性。赤線とその領域は非相対論の結果 [2, 3]、黒線は相対論の結果。

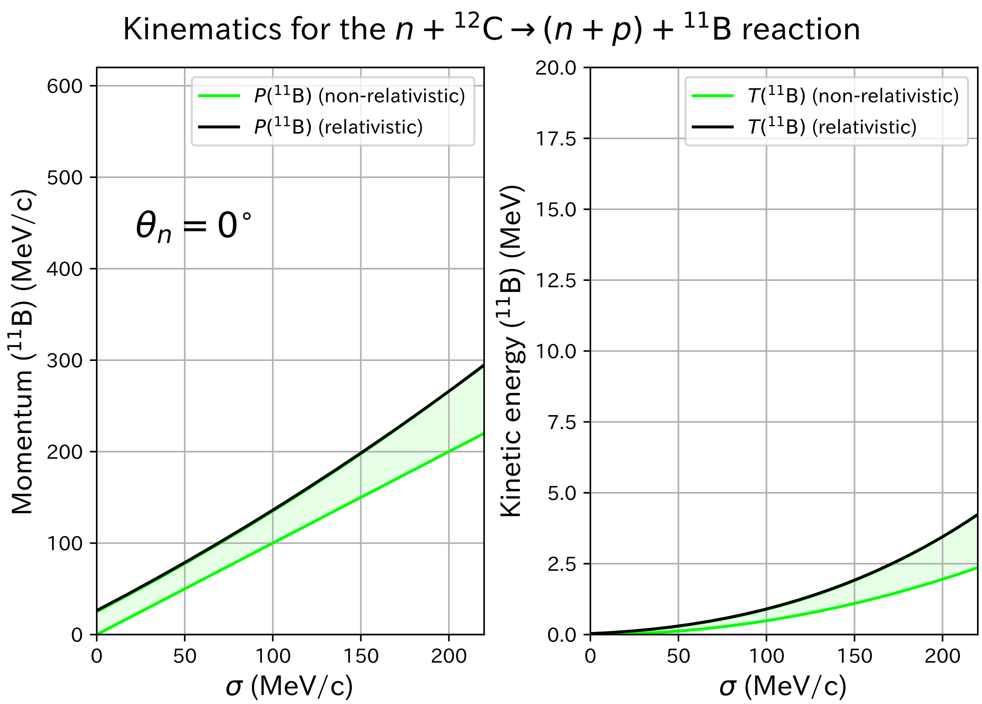


Figure 7: $\theta_n = 0^\circ$ での $n$+$^{12}$C→ $(n+p)$+$^{11}$B 準弾性散乱 (@$T_n = 200$ MeV) における、$^{11}$B の運動量の絶対値とエネルギのフェルミ運動量 $\sigma$ 依存性。緑線とその領域は非相対論の結果 [2, 3]、黒線は相対論の結果。