

$^{11}\text{Li} + p \rightarrow ^{10}\text{He} + 2p$ 準弾性散乱の運動学

Y. Satou, T. Matsui, Y. Makimura

September 24, 2024

Abstract

$\theta(^{11}\text{Li}) = 0^\circ$ 及び逆運動学条件下での $^{11}\text{Li} + p \rightarrow (^{10}\text{He} + p) + p$ 準弾性散乱の運動学を相対論の枠組みの中で考察した。フェルミ運動量は、終状態の陽子と ^{10}He の相対運動量とした。

1 はじめに

報告 [1] において、 $n + ^{12}\text{C} \rightarrow (n + p) + ^{11}\text{B}$ 反応の運動学を考察した。相対論を用い、陽子と ^{11}B のフェルミ運動はそれらの重心系における運動量とされた。

ここでは、同様の考察を $\theta(^{11}\text{Li}) = 0^\circ$ 及び逆運動学条件下での $^{11}\text{Li} + p \rightarrow (^{10}\text{He} + p) + p$ 準弾性散乱に適用した。運動学パラメータの導出方法を述べ、入射エネルギーが 200 MeV/u の場合の上記準弾性散乱の緒運動学パラメータの振る舞いを示す。

今回の計算に関連する原子核の質量を表 1 にまとめた。 $^{11}\text{Li} \rightarrow p + ^{10}\text{He}$ 分解反応の Q 値は、

$$M(^{11}\text{Li}) = m_p + M(^{10}\text{He}) + Q, \quad (1)$$

より求まり、 $Q = -15.75786$ MeV である。

Table 1: 用いた各原子核の質量。

	m_p	$M(^{11}\text{Li})$	$M(^{10}\text{He})$
質量 (MeV)	938.27207	10285.63038	9363.11617

尚、今回のフォーマリズムは、 $d + p \rightarrow (n + p) + p$ 分解過程の記述にも適用可能である。これを、 $T_d = 135$ MeV/u での同過程の記述に適用したところ、幾つかの運動学量が、 $d + p$ 弾性散乱におけるある種の運動学量との類似性を示すことが分かった。この観察についても述べる。

2 陽子と ^{10}He が相対運動エネルギーを持たない場合

終状態の陽子と ^{10}He は一つの塊（粒子）として取り扱い、その質量は M_0 、エネルギー・運動量（四元ベクトル）は (E'_0, P'_0) である。ビーム核種 ^{11}Li の四元ベクトルは (E_b, P_b) 、質量は M_b である。始状態の標的水素の四元ベクトルは $(m_t, 0)$ である。

陽子の質量は m_p とする ($m_t = m_p$)。反応後の反跳陽子の進行方向はビーム軸方向とし、四元ベクトルは (E'_t, p'_t) で表す。

Mandelstam の s 変数 [2] は次の通り。

$$s = (E_b + m_t)^2 - P_b^2 = M_b^2 + 2E_b m_t + m_t^2. \quad (2)$$

重心系に移るローレンツ変換の β, γ は次の通り。

$$\beta = \frac{P_b}{E_b + m_t}, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_b + m_t}{\sqrt{s}}. \quad (4)$$

重心系での ^{11}Li と標的の四元ベクトルを、それぞれ (E^c, p^c) 、 $(E_t^c, -p^c)$ とすると、これらは実験室系での対応量と次の様に対応付けられる。

$$\begin{pmatrix} E^c \\ p^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_b \\ P_b \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} E_t^c \\ -p^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

重心系での、陽子と ^{10}He の二体系（この節では質量 M_0 の一体系として取り扱う）と反応後の反跳陽子の四元ベクトルをそれぞれ、 (E'^c, p'^c) 、 $(E_t'^c, -p'^c)$ とする。ここで、次の緒関係が成り立つ¹。

$$\sqrt{s} = E^c + E_t^c = E'^c + E_t'^c, \quad (7)$$

$$E'^c = \sqrt{M_0^2 + (p'^c)^2}, \quad (8)$$

$$E_t'^c = \sqrt{m_t^2 + (p'^c)^2}. \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) から次を得る。

$$(E'^c)^2 - (E_t'^c)^2 = M_0^2 - m_t^2. \quad (10)$$

これと式 (7) は次の関係を示唆する。

$$E'^c - E_t'^c = \frac{1}{\sqrt{s}}(M_0^2 - m_t^2), \quad (11)$$

$$E'^c + E_t'^c = \sqrt{s}. \quad (12)$$

これを解いて、重心系での各粒子の散乱後の全エネルギーを得る。

$$E'^c = \frac{1}{2\sqrt{s}}(M_0^2 - m_t^2 + s), \quad (13)$$

$$E_t'^c = \frac{1}{2\sqrt{s}}(-M_0^2 + m_t^2 + s). \quad (14)$$

¹反跳陽子が（陽子以外の）別の粒子の場合は、式 (9) において m_t を一般の m に置き換えれば、それ以下の式はそのまま使用できる

また、 $p'^c = \sqrt{(E_t'^c)^2 - m_t^2}$ である。

実験室系での四元運動量はローレンツ変換により次で求まる。

$$\begin{pmatrix} E'_0 \\ P'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'^c \\ p'^c \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} E'_t \\ p'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_t'^c \\ -p'^c \end{pmatrix}. \quad (16)$$

3 陽子と ^{10}He が相対運動エネルギーを持つ場合

分解反応の結果生じた陽子と ^{10}He の二体系の静止系において、陽子と ^{10}He はフェルミ運動量 (相対運動量) σ を持つとする。それぞれの四元ベクトルを (E_1'', \mathbf{P}_1'') 、 (E_2'', \mathbf{P}_2'') とする。陽子の質量 m_p と ^{10}He の質量 [$M(^{10}\text{He})$ とする] を用いて各成分は次で表される。

$$E_1'' = \sqrt{m_p^2 + \sigma^2}, \quad (17)$$

$$P_{1z}'' = \sigma \cos \theta, \quad (18)$$

$$P_{1x}'' = \sigma \sin \theta, \quad (19)$$

$$E_2'' = \sqrt{M(^{10}\text{He})^2 + \sigma^2}, \quad (20)$$

$$P_{2z}'' = -\sigma \cos \theta, \quad (21)$$

$$P_{2x}'' = -\sigma \sin \theta. \quad (22)$$

ここで、 θ は相対運動量のビーム方向からの回転角度である。フェルミ運動のダイアグラムを図 1 に示す。 $\theta = 0^\circ$ で陽子のベクトルはビームの向き (z 軸の正方向) とした (^{10}He のベクトルはビームと反対方向 (z 軸の負方向) を向く)²。 θ の正の値は反時計回りを表す。

終状態二体系を一体として扱う際の質量は、フェルミ運動の効果も含み、 M_0 で与えられるとする。

$$M_0 = E_1'' + E_2''. \quad (23)$$

実験室系から、陽子と ^{10}He の二体系の静止系に移るローレンツ変換のパラメータを $\beta_1 = P'_0/E'_0$ 、 $\gamma_1 = E'_0/M_0$ とする。実験室系での陽子と ^{10}He の四元ベクトルを (E'_1, \mathbf{P}'_1) 、 (E'_2, \mathbf{P}'_2) とする。これらは次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ P'_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1'' \\ P_{1z}'' \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$P'_{1x} = P_{1x}'', \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} E'_2 \\ P'_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2'' \\ P_{2z}'' \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$P'_{2x} = P_{2x}''. \quad (27)$$

²今回は、報告 [1] と反対のコンベンションとした。

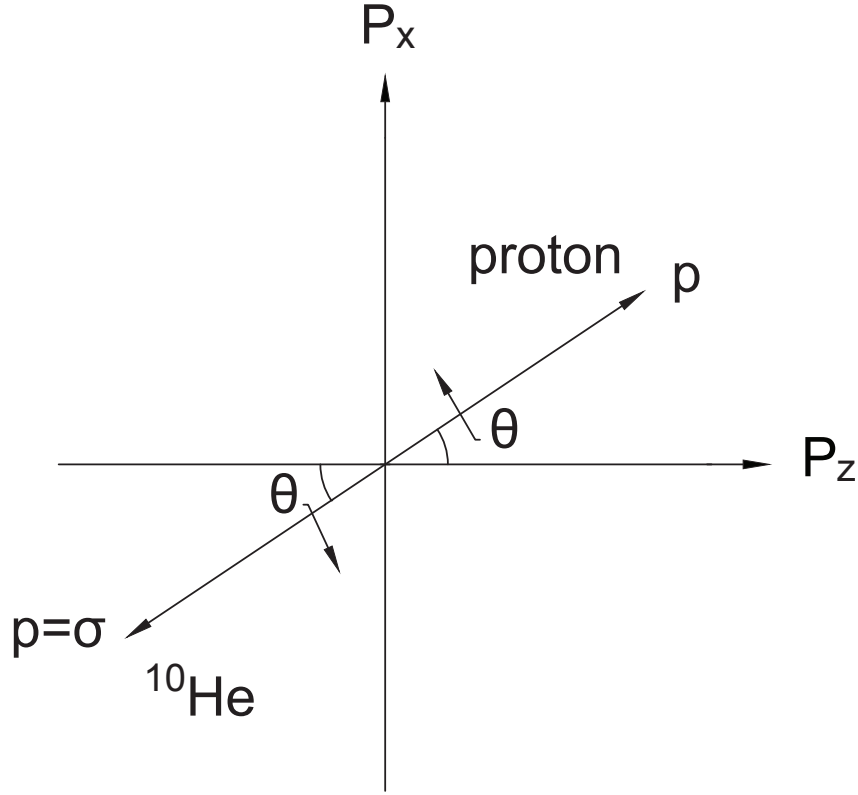


Figure 1: $\theta(^{11}\text{Li}) = 0^\circ$ での $^{11}\text{Li} + p \rightarrow (^{10}\text{He} + p) + p$ 分解反応後の、陽子と ^{10}He 核の重心系での相対運動量ベクトルのダイアグラム。 θ と相対運動量 p ($=\sigma$: フェルミ運動量) が独立変数に取られる。

次の関係が成り立つのは自明である。

$$E'_1 + E'_2 = E'_0, \quad (28)$$

$$P'_{1z} + P'_{2z} = P'_0, \quad (29)$$

$$P'_{1x} + P'_{2x} = 0. \quad (30)$$

フェルミ運動量 ($p = \sigma$) を変化させた時の、反跳陽子、 ^{10}He 、及び分解陽子の運動量と運動エネルギーの変化を図 2 に示す。 $\theta = 0^\circ$ についての計算結果で、 ^{10}He の諸量は核子当たりの値が示されている。入射 ^{11}Li のエネルギーは $T(^{11}\text{Li}) = 200 \text{ MeV/u}$ ($E_b - M_b = 2208.41557 \text{ MeV}$, $P_b = 7092.74220 \text{ MeV/c}$: 相対論で計算) とした。

図 3 に、フェルミ運動量を変化させた際の次の諸量の振る舞いを示す: (左パネル) 終状態の陽子と ^{11}B の二体系を一体系として扱った際の質量の増加 [$M_0 - m_p - M(^{11}\text{B})$]、(中央パネル) 同二体系の一体系としての核子当たりの運動エネルギー [$(E'_0 - M_0)/(M_0/\text{AMU})$]、(右パネル) 同二体系の一体系としての核子当たりの運動量 [$P'_0/(M_0/\text{AMU})$]。原子質量単位 (Atomic Mass Unit) の値は $\text{AMU} = 931.4941024 \text{ MeV}$ を採用した。

図 4 に、陽子 $-^{10}\text{He}$ 二体系のフェルミ運動量が $\sigma = 90 \text{ MeV/c}$ ($=p$)、方位が $\theta = [0^\circ, 360^\circ]$ の場合の、分解過程後の陽子と ^{10}He の運動量の軌跡 (trajectory) を示す。

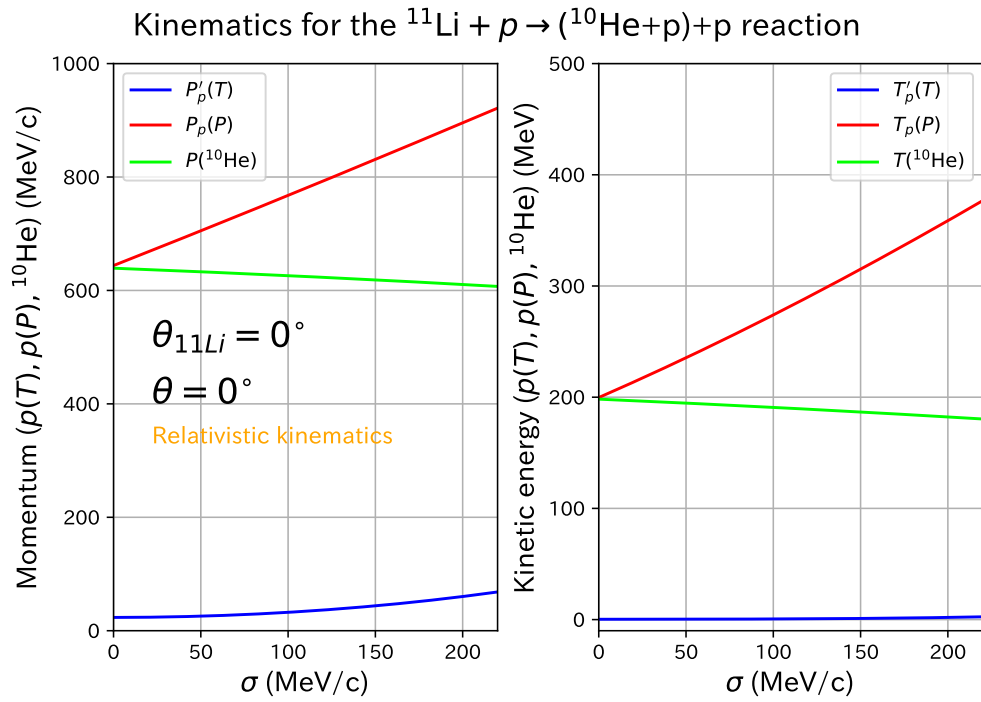


Figure 2: $T({}^{11}\text{Li}) = 200 \text{ MeV/u}$ での ${}^{11}\text{Li} + p \rightarrow ({}^{10}\text{He} + p) + p$ 反応の運動学。フェルミ運動量 σ を変化させた際の各粒子の運動量（左パネル）と運動エネルギー（右パネル）の変化を示す。 ${}^{10}\text{He}$ の運動量、エネルギーは核子当たりの値とした。入射粒子 ${}^{11}\text{Li}$ の分解生成物 (${}^{10}\text{He}$, 陽子) の重心は直進するとした。終状態二体系の内部のフェルミ運動の方向（図 1）は $\theta = 0^\circ$ とした。

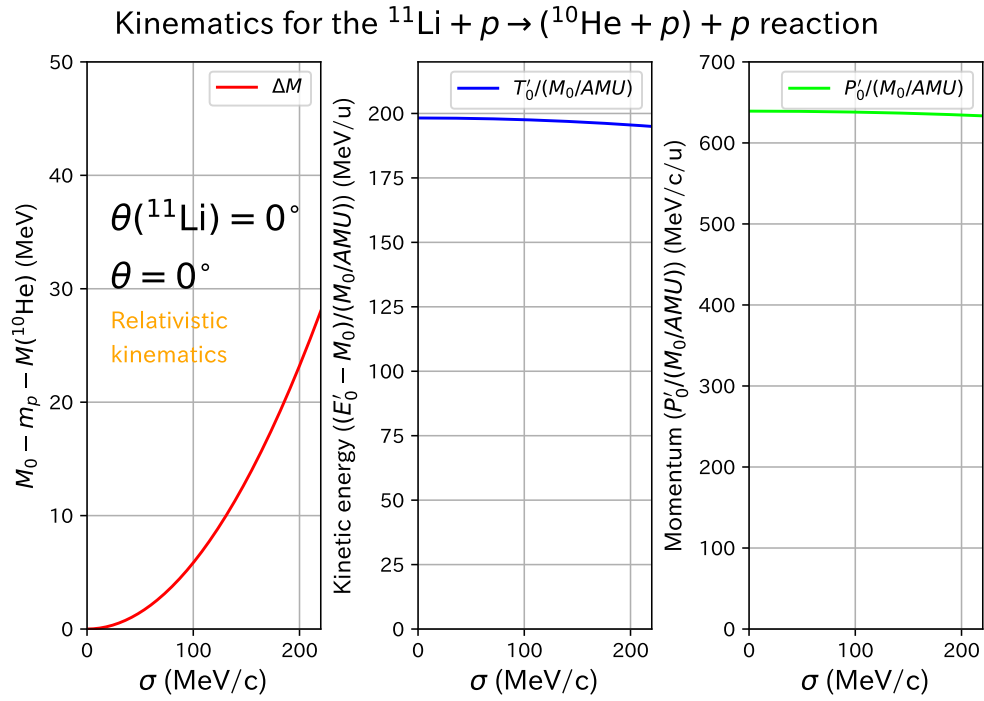


Figure 3: $T(^{11}\text{Li}) = 200 \text{ MeV/u}$ での $^{11}\text{Li} + p \rightarrow ({}^{10}\text{He} + p) + p$ 反応の運動学 (続き)。フェルミ運動量 σ を変化させた際の終状態二体系の質量増分、 $M_0 - m_p - M(^{10}\text{He})$ 、(左パネル)、同二体系の核子当たりの運動エネルギー、 $(E'_0 - M_0)/(M_0/\text{AMU})$ 、(中央パネル)、同二体系の核子当たりの運動量、 $P'_0/(M_0/\text{AMU})$ 、(右パネル)。

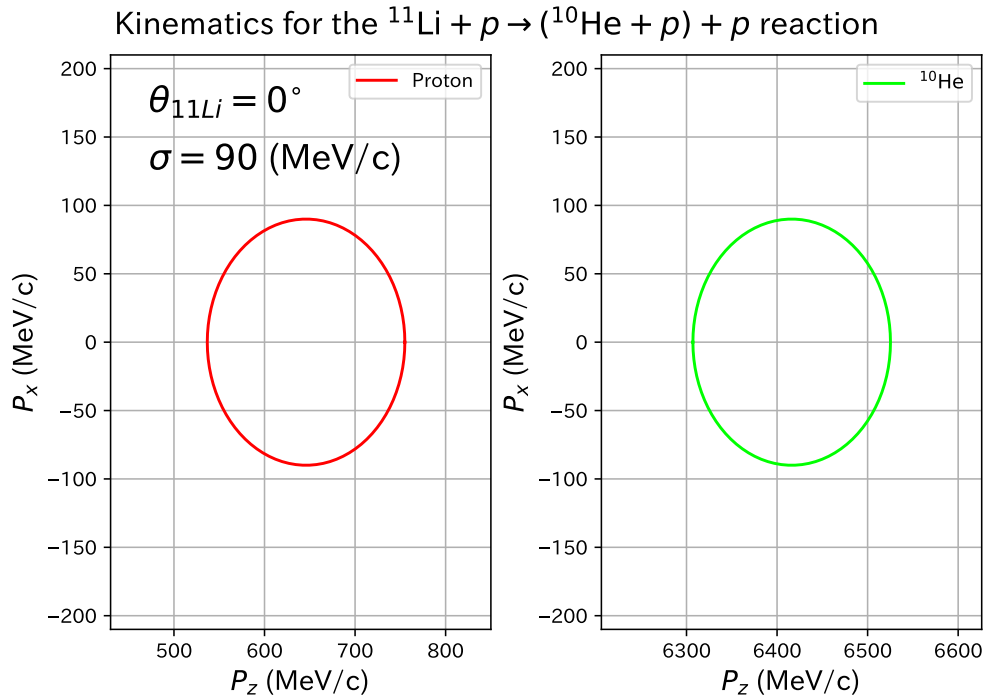


Figure 4: フェルミ運動量が $\sigma = 90 \text{ MeV/c}$ ($=p$)、方位が $\theta = [0^\circ, 360^\circ]$ の場合の、分解過程後の陽子 (左パネル) と ${}^{10}\text{He}$ (右パネル) の運動量の軌跡。

4 フォーマリズムの $d + p \rightarrow (n + p) + p$ 分解過程への応用

今回の運動学の考察はそのまま、 $d + p \rightarrow (n + p) + p$ 分解過程にも当てはめることができる。すなわち、 $^{11}\text{Li} \rightarrow d$ 、 $^{10}\text{He} \rightarrow n$ の置き換えを行えば、同じフォーマリズムを適用可能である。この観点から、 $\theta = 0^\circ$ 及び $\theta_d = 0^\circ$ での、入射重陽子の陽子-中性子系への分解反応を、 σ の関数としてプロットしたものを図 5 に示す。入射重陽子のエネルギーは $T_d = 135 \text{ MeV/u}$ とした。

標的由来の反跳陽子の運動量と、ビーム起源の中性子の運動量が $\sigma = 249.5 \text{ MeV/c}$ で一致する。この時のそれぞれの核子の運動量は 166.2 MeV/c で、合計すると 332.4 MeV/c となる。尚、この $\sigma = 249.5 \text{ MeV/c}$ において、ビーム起源の陽子は運動量が極大となり、その値は、 713.4 MeV/c である。

これらの値は、 $d + p$ 弾性散乱の運動学ダイアグラム (図 6) における、 $\theta_{\text{cm}} = 180^\circ$ での、それぞれ、重陽子の運動量 (327.2678 MeV/c) と反重陽子の運動量 (718.4787 MeV/c) に対応している。

5 フォーマリズムの $^{18}\text{N} + ^{12}\text{C} \rightarrow (^{17}\text{C} + p) + ^{12}\text{C}$ 分解過程への応用

今回のフォーマリズムは、標的が複合核であっても、これが反応後分解しなければ適用可能である。核子当たり 200 MeV/u の $^{18}\text{N} + ^{12}\text{C} \rightarrow (^{17}\text{C} + p) + ^{12}\text{C}$ 反応について得た運動学ダイアグラムを図 7 に示す。終状態のビーム分解生成物のフェルミ運動の方向 (図 1) は $\theta = 180^\circ$ とした。

References

- [1] Kinematics of the $n + ^{12}\text{C} \rightarrow (n + p) + ^{11}\text{B}$ quasi-free elastic scattering (III) (Y.Satou, Y.Makimura).
- [2] C.J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, North-Holland (1975).

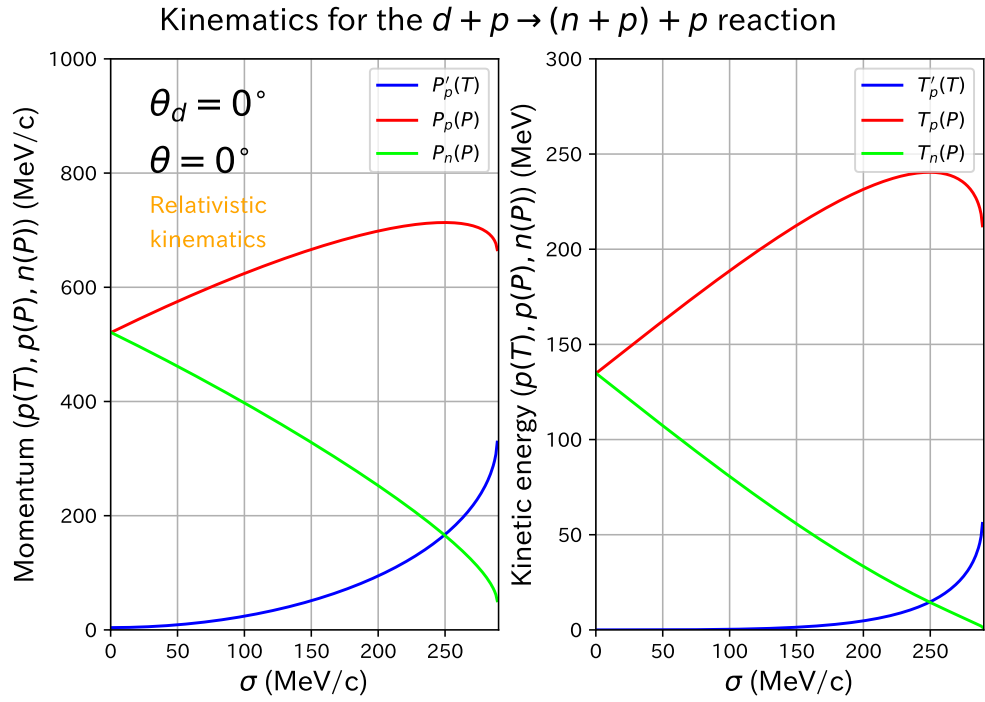


Figure 5: $T_d = 135$ MeV/u での $d + p \rightarrow (n + p) + p$ 反応の運動学。重陽子内のフェルミ運動量 σ を変化させた際の各粒子の運動量（左パネル）と運動エネルギー（右パネル）の変化を示す。入射粒子重陽子の分解生成物（中性子, 陽子）の重心は直進するとした ($\theta_d = 0^\circ$)。終状態二体系の内部のフェルミ運動の方向（図 1）は $\theta = 0^\circ$ とした。

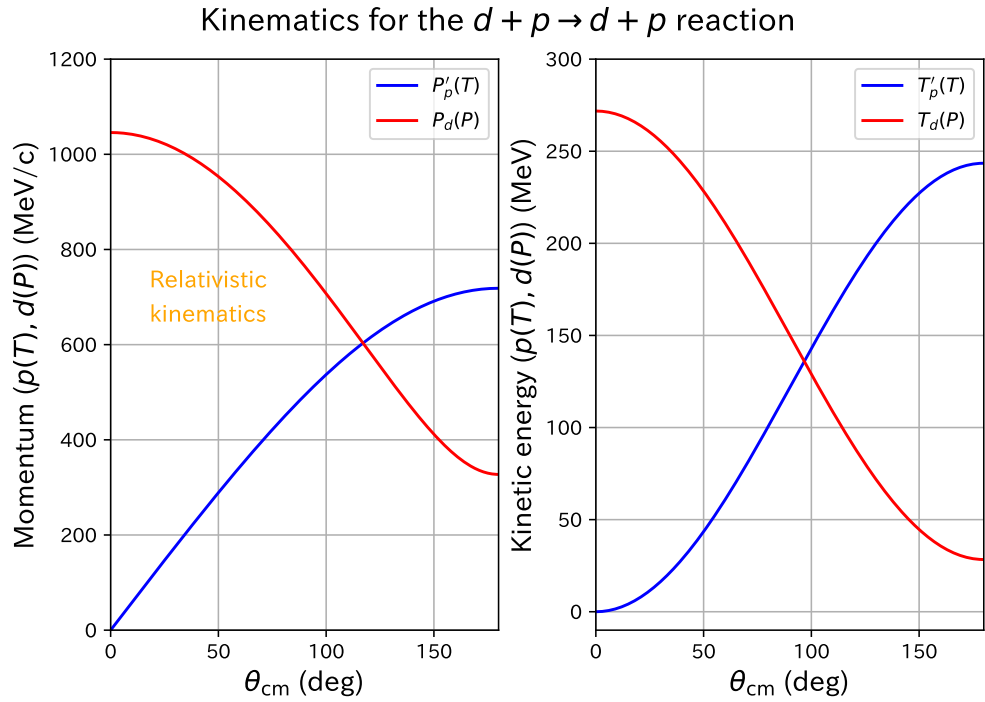


Figure 6: $T_d = 135$ MeV/u での $d + p \rightarrow d + p$ 弾性散乱の運動学。重陽子と陽子の運動量（左パネル）と運動エネルギー（右パネル）の重心系散乱角度 θ_{cm} 依存性。

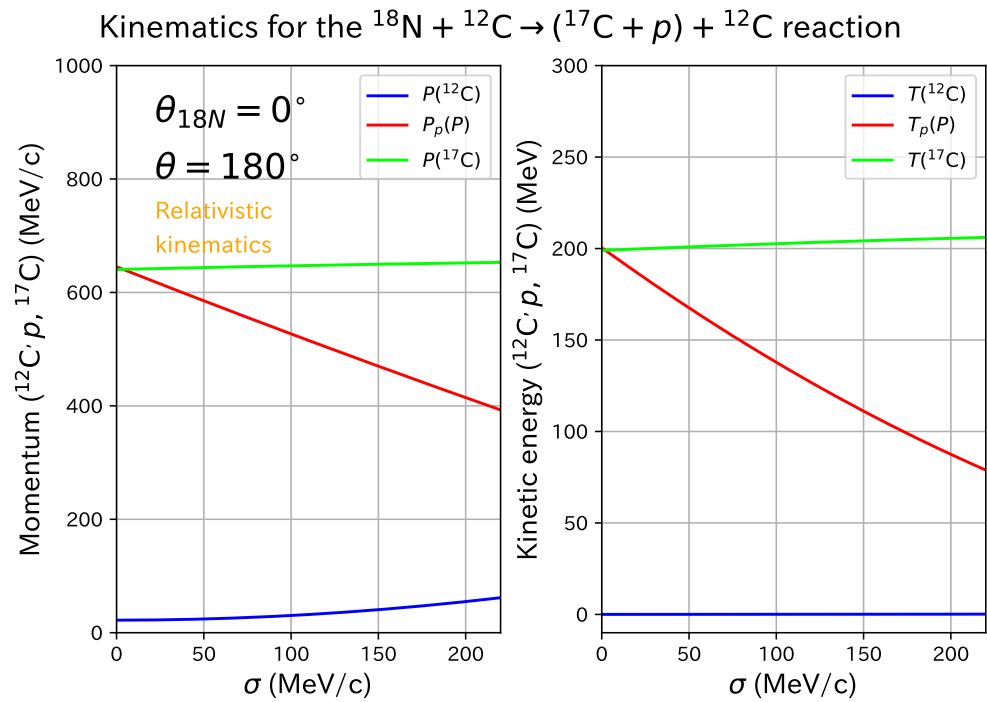


Figure 7: $T(^{18}\text{N}) = 200 \text{ MeV/u}$ での $^{18}\text{N} + ^{12}\text{C} \rightarrow (^{17}\text{C} + p) + ^{12}\text{C}$ 反応の運動学。フェルミ運動量 σ を変化させた際の各粒子の運動量（左パネル）と運動エネルギー（右パネル）の変化を示す。 ^{17}C の運動量、エネルギーは核子当たりの値とした。入射粒子 ^{18}N の分解生成物 (^{17}C , 陽子) の重心は直進するとした。終状態二体系の内部のフェルミ運動の方向 (図 1) は $\theta = 180^\circ$ とした。